HUBUNGAN ANTARA ORDER DERIVATIF-F^{α} DARI FUNGSI $f : F \to \mathbb{R}$ DENGAN DIMENSI-γ DARI HIMPUNAN FRAKTAL F

Supriyadi Wibowo

Jurusan Matematika F MIPA UNS

Abstrak

Kurva-kurva kontinu tetapi mempunyai struktur yang tidak teratur (fraktal) seperti fungsi anak tangga Lebesgue-Cantor (fungsi singular Lebesgue-Cantor) dimana fungsi ini tidak terdiferensial hampir dimana-mana, sehingga fungsi ini bukan merupakan solusi dari persamaan diferensial biasa. Sebagai konsekuensinya, kalkulus biasa tidak dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan fungsi ini . Sehingga perlunya dikonstruksikan suatu derivatif dalam hal ini derivatif-F^{α},yang dapat bekerja pada suatu himpunan fraktal. Dalam makalah ini dibahas hubungan antara order derivatif-F^{α} fungsi $f : F \to \mathbb{R}$ dengan dimensi-γ dari himpunan fraktal F. Dengan menggunakan sifat-sifat derivatif-F^{α} dan dimensi-γ, dapat dibuktikan bahwa dimensi-γ himpunan perfek-α F sama dengan order derivatif fungsi $f : F \to \mathbb{R}$ terhadap derivatif -F^{α}.

Kata kunci : fungsi singular Lebesgue-Cantor, order derivatif-F^{α}, dimensi-γ himpunan fraktal F

PENDAHULUAN

Kurva-kurva kontinu tetapi mempunyai struktur yang tidak teratur (fraktal) seperti fungsi singular Lebesgue-Cantor (fungsi anak tangga Cantor) dimana fungsi ini tidak terdiferensial hampir dimana-mana, sehingga fungsi ini bukan merupakan solusi dari persamaan diferensial biasa. Sebagai konsekuensinya, kalkulus biasa tidak dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan fungsi ini, sehingga perlunya dikembangkan kalkulus baru, dalam hal ini seperti pendekatan Riemann dalam integral-Riemann, yang didasarkan pada himpunan fraktal $F \subset \mathbb{R}$. Dalam kalkulus baru ini juga memuat formulasi tentang derivatif dan integral dengan order $\alpha \in (0,1]$ berdasarkan himpunan fraktal $F \subset \mathbb{R}$, selanjutnya berturut-turut disebut derivatif-F^{α} dan integral-F^{α}. Jika himpunan $F \subset \mathbb{R}$ berdimensi $\alpha \in (0,1]$, maka dengan derivatif-F^{α}, turunan dari fungsi anak tangga Cantor $S_C^{\alpha}(x)$ dengan $\alpha = {}^{3}\ln 2$ dan C himpunan pertigaan Cantor adalah fungsi karakteristik $\chi_C(x)$, yaitu fungsi yang bernilai satu pada C dan bernilai nol untuk yang lain. Fungsi anak tangga Cantor $S_C^{\alpha}(x)$ dapat diperumum untuk sebarang himpunan fraktal F menjadi fungsi anak tangga $S_F^{\alpha}(x)$ dengan $\alpha \in (0,1]$ dan F himpunan fraktal. Fungsi anak tangga memainkan peran sentral dalam kalkulus-F^{α}, dalam derivatif-F^{α} kuantitas $(S_F(y) - S_F(x))$ menggantikan posisi $(y - x)$, panjang interval $[x, y]$ atau jarak antara x dan y dalam kalkulus biasa (Parvate dan Gangal, 2003 dan 2005).

Fungsi singular Lebesgue-Cantor terdiferensial hampir dimana-mana pada $[0,1]$, dalam artian fungsi tersebut mempunyai turunan order satu pada himpunan $[0,1] - C$ yang berdimensi satu, tetapi tidak mempunyai turunan biasa (bernilai tak hingga) pada himpunan berukuran nol yaitu himpunan pertigaan Cantor $C \subset [0,1]$ yang berdimensi $\alpha = {}^{3}\ln 2$ (Bartle, 2001). Tampak bahwa ada hubungan erat antara order derivatif suatu fungsi dengan dimensi domain dimana fungsi tersebut terdefinisi. Dalam penelitian ini akan diselidiki hubungan antara order derivatif-F^{α} suatu fungsi dengan dimensi-γ dari domain dimana fungsi tersebut terdefinisi.

LANDASAN TEORI

Berikut akan dikonstruksikan fungsi singular Cantor-Lebesgue atau *Devil's staircase function* $L:[0,1]\to\mathbb{R}$ secara rekursif sebagai berikut

fungsi $L_1:[0,1]\to\mathbb{R}$ adalah fungsi linear sepotong-sepotong (*piecewise linear function*) dengan

$L_1(0)=0, L_1(x)=1/2$, untuk $x\in[1/3,2/3]$ dan $L_1(1)=1$.

Fungsi $L_2:[0,1]\to\mathbb{R}$ adalah fungsi linear sepotong-sepotong dengan

$L_2(0)=0, L_2(x)=1/4$, untuk $x\in[1/9,2/9]$, $L_2(x)=1/2$, untuk $x\in[1/3,2/3]$,

$L_2(x)=3/4$, untuk $x\in[7/9,8/9]$ dan $L_2(1)=1$.

Secara umum, fungsi $L_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ adalah fungsi linear sepotong-sepotong dengan

$$L_n(0)=0, L_n(1)=1$$

dan bernilai $1/2^n, 2/2^n, \ldots, 2^{n-1}/2^n$ pada interval-interval tertutup yang berkorespondensi dengan interval-interval penghapusan dalam membentuk C_n.

Dari uraian di atas tampak bahwa barisan fungsi $\{L_n\}$ memenuhi sifat-sifat berikut

i. fungsi L_n adalah fungsi kontinu pada $[0,1]$ untuk $n=1,2,3,\ldots$

ii. fungsi L_n adalah fungsi naik pada $[0,1]$ untuk $n=1,2,3,\ldots$.

Berdasarkan *i* dan *ii* diperoleh beberapa sifat fungsi $L:[0,1]\to\mathbb{R}$, sebagai berikut

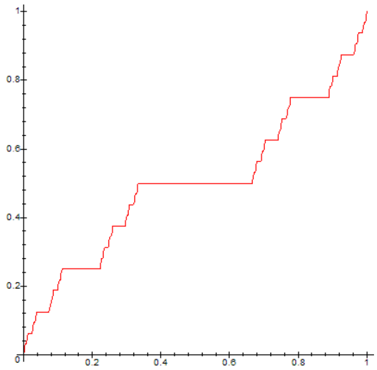
Teorema 2.1 (Bartel, 2001 dan Barra, 1981) *Diberikan fungsi singular Cantor-Lebesgue* $L:[0,1]\to\mathbb{R}$, *maka berlaku sifat-sifat berkut*

i. fungsi L adalah kontinu pada $[0,1]$

ii. fungsi L adalah naik pada $[0,1]$

iii. turunan $D^1(L(x))=\begin{cases}\infty, & x\in C\\ 0, & x\in[0,1]-C\end{cases}$.

Berikut diberikan gambar fungsi singular Cantor-Lebesgue $L:[0,1]\to\mathbb{R}$.



Gambar 2.1

Gambar fungsi singular Cantor-Lebesgue $L(x)$

Diberikan himpunan F himpunan bagian bilangan real. Berikut akan didefinisikan konten (*content*) atau massa-α dari *F* di dalam $\left[a,b\right]$, yaitu massa $F\bigcap\left[a,b\right]$ dengan order-α , $0<\alpha\le 1$ .Definisi **2.2 (Parvate and Gangal, 2003)** *Subdivisi* (*subdivision*) $P_{[a,b]}(P)$ *dari interval* $\left[a,b\right]$, $a<b$ *adalah himpunan titik-titik berhingga* $\left\{a=x_0,x_1,...,x_n=b\right\}, x_i<x_{i+1}$ *. Sebarang interval yang berbentuk* $\left[x_i,x_{i+1}\right]$ *disebut interval komponen (component interval) atau komponen (component) dari subdivisi P. Jika Q adalah sebarang subdivisi dari* $\left[a,b\right]$ *dan* $P\subset Q$, *maka dikatakan Q sebagai penghalus dari P. Jika* $a=b$, *maka himpunan* $\left\{a\right\}$ *adalah hanya subdivisi dari* $\left[a,b\right]$.

Definisi 2.3 (Parvate and Gangal, 2003) *Untuk himpunan F dan subdivisi* $P_{[a,b]}, a<b$, *fungsi massa* $\gamma^{\alpha}\left(F,a,b\right)$ *didefinisikan oleh*

$$\gamma^{\alpha}\left(F,a,b\right)=\lim_{\delta\to 0}\inf_{\left\{P_{[a,b]}:\left|P\right|\le\delta\right\}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(x_{i+1}-x_i\right)^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\theta\left(F,\left[x_i,x_{i+1}\right]\right)$$

dengan $\theta\left(F,\left[x_i,x_{i+1}\right]\right)=1$ *jika* $F\bigcap\left[x_i,x_{i+1}\right]$ *tidak kosong dan nol untuk yang lain, serta* $\left|P\right|=\max\limits_{o\le i\le n-1}\left(x_{i+1}-x_i\right)$.

Motivasi dari definisi di atas berasal dari kalkulus fraksional (*fractional calculus*) dan konstruksi ukuran Hausdorff.

Sifat penskalaan dan translasi untuk fungsi massa diberikan oleh teorema berikut

Teorema 2.4 (Parvate and Gangal, 2003) *Diberikan* $F\subset\mathbb{R}$ *dan* $\lambda\in\mathbb{R}$, *misalkan* $F+\lambda$ *menotasikan himpunan* $F+\lambda=\left\{x+\lambda : x\in F\right\}$ *dan misalkan* λF *menotasikan himpunan* $\lambda F=\left\{\lambda x : x\in F\right\}$, *maka berlaku*

(a) *Translasi* : $\gamma^{\alpha}\left(F+\lambda,a+\lambda,c+\lambda\right)=\gamma^{\alpha}\left(F,a,b\right)$

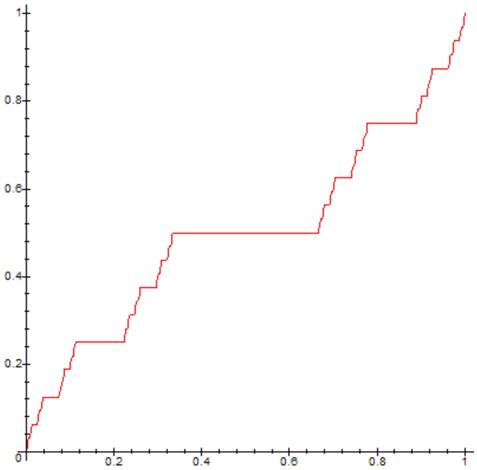
(b) *Penskalaan* $\left(\lambda\ge 0\right)$: $\gamma^{\alpha}\left(\lambda F,\lambda a,\lambda c\right)=\lambda^{\alpha}\gamma^{\alpha}\left(F,a,b\right)$.

Remark : Jika himpunan *F* adalah sebangun diri (*self-similar*) diperoleh $\lambda_0 F\cap\left[\lambda_0 a,\lambda_0 b\right]=F\cap\left[\lambda_0 a,\lambda_0 b\right]$ untuk suatu λ_0, maka dengan sifat penskalaan dapat dituliskan sebagai $\gamma^{\alpha}\left(F,\lambda_0 a,\lambda_0 c\right)=\lambda_0{}^{\alpha}\gamma^{\alpha}\left(F,a,b\right)$. Sebagai contoh himpunan pertigaan Cantor (*middel* $\frac{1}{3}$ *Cantor set*) *C* dengan $a=0,b=1$ dan $\lambda_0=\frac{1}{3^n}$.

Definisi 2.5 (Parvate and Gangal, 2003) *Misalkan* a_0 *adalah sebarang bilangan real tetapi tertentu. Fungsi integral anak tangga* (*staircase*) $S_F^{\alpha}\left(x\right)$ *dengan order* α *untuk himpunan F diberikan oleh*

$$S_F^{\alpha}\left(x\right)=\begin{cases}\gamma^{\alpha}\left(F,a_0,x\right), x\ge 0\\ -\gamma^{\alpha}\left(F,x,a_0\right), x<0\end{cases}.$$

Fungsi S_F^{α} adalah fungsi anak tangga *(staircase function)* untuk himpunan fraktal *F* dengan order $0<\alpha\le 1$, merupakan perumuman fungsi anak tangga Cantor $S_C^{\alpha}\left(x\right)$ dengan $\alpha={}^{3}\ln 2$ dan *C* himpunan pertigaan Cantor. Berikut diberikan gambar fungsi anak tangga Cantor $\Gamma\left(\alpha+1\right)S_C^{\alpha}\left(x\right)$.



Gambar 2.2

Gambar fungsi anak tangga Cantor $\Gamma(\alpha+1)S_C^{\alpha}(x)$

Berikut diberikan beberapa sifat fungsi anak tangga $S_F^{\alpha}(x)$ terkait dengan fungsi massa $\gamma^{\alpha}(F,a,b)$.

Teorema 2.6 (Parvate and Gangal, 2003) *Diberikan* $F \subset \mathbb{R}$ *dan* $0<\alpha\le 1$. *Jika* $\gamma^{\alpha}(F,a,b)<\infty$, *maka untuk semua* $x,y\in(a,b)$ *dengan* $x<y$, *memenuhi sifat-sifat berikut*

(a) $S_F^{\alpha}(x)$ *adalah naik di x.*

(b) *Jika* $F\cap(a,b)=\varnothing$, *maka* S_F^{α} *adalah konstan di* $[x,y]$.

(c) $S_F^{\alpha}(y)-S_F^{\alpha}(x)=\gamma^{\alpha}(F,x,y)$.

(d) S_F^{α} *adalah kontinu pada* (a,b).

Berdasarkan keserupaan definisi antara fungsi massa dengan ukuran luar Hausdorff (*Hausdorff outer measure*), maka fungsi massa dapat digunakan untuk mendefinisikan dimensi fraktal, serta diberikan hubungan dengan dimensi fraktal yang lain yaitu dimensi Hausdorff dan dimensi kotak.

Definisi 2.7 (Parvate and Gangal, 2003) *Dimensi-*γ *dari* $F\cap[a,b]$, *dinotasikan* $\dim_{\gamma}(F\cap[a,b])$, *didefinisikan sebagai*

$$\dim_{\gamma}(F\cap[a,b])=\inf\{\alpha:\gamma^{\alpha}(F,a,b)=0\}$$
$$=\sup\{\alpha:\gamma^{\alpha}(F,a,b)=\infty\}$$

Hubungan antara dimensi Hausdorff, dimensi-γ dan dimensi kotak (*box dimension*) berturut-turut dituliskan dengan $\dim_H$, $\dim_{\gamma}$ dan $\dim_B$ diberikan oleh Parvate dan Gangal (2003), sebagai berikut

$$\dim_H(F\cap[a,b])\le\dim_{\gamma}(F\cap[a,b])\le\dim_B(F\cap[a,b]).$$

Dalam bagian ini akan diberikan limit dan kekontinuan menggunakan topologi $F\subset\mathbb{R}$ dengan metrik *inherited* dari $\mathbb{R}$.

Definisi 2.8 (Parvate and Gangal, 2003) *Diberikan* $F \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dan* $x \in F$. *Bilangan l dikatakan limit-F untuk* $y \to x$, *jika diberikan sebarang* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $\delta > 0$ *yang memenuhi :*

$$y \in F \text{ dan } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - l| < \varepsilon .$$

Jika bilangan tersebut ada, maka dituliskan dengan

$$l = F - \lim_{y \to x} f(y).$$

Definisi ini tidak termasuk nilai fungsi di *y* jika $y \notin F$, juga limit-F tidak terdefinisi di titik-titik $x \notin F$.

Sebagaimana turunan order satu, derivatif-F^{α} untuk $0 < \alpha \le 1$ juga merupakan limit pembagian, tetapi dengan limit-*F* sedangkan penyebutnya adalah nilai dari fungsi anak tangga S_F^{α} di dua titik anggota himpunan perfek-α **(**α **-*perfect*)** yaitu himpunan tertutup dan semua titiknya adalah titik limit-*F*.

Definisi 2.9 (Parvate and Gangal, 2003) *Jika F adalah himpunan perfek-*α **(**α **-*perfect*)** *untuk* $0 < \alpha \le 1$ **,** *maka derivatif* F^{α} *dari fungsi f didefinisikan oleh*:

$$D_F^{\alpha}\left(f(x)\right) = \begin{cases} F - \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{S_F^{\alpha}(y) - S_F^{\alpha}(x)}, & x \in F \\ 0 & , x \notin F \end{cases}$$

jika limit-F ada.

Sifat kelinearan derifatif-F^{α} adalah konsekuensi dari Definisi 2.9 dan diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.10 (Parvate and Gangal, 2003) *Diberikan fungsi f dan g pada* $[a,b]$.

(i) *Jika* $D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)$ *ada untuk semua* $x \in [a,b]$, *maka* $D_F^{\alpha}\left(\lambda f(x)\right)$ *ada dan berlaku* $D_F^{\alpha}\left(\lambda f(x)\right) = \lambda D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)$.

(ii) *Jika* $D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)$ *dan* $D_F^{\alpha}\left(g(x)\right)$ *ada untuk semua* $x \in [a,b]$, *maka* $D_F^{\alpha}\left(f(x) + g(x)\right)$ *ada dan berlaku* $D_F^{\alpha}\left(f(x) + g(x)\right) = D_F^{\alpha}\left(f(x)\right) + D_F^{\alpha}\left(g(x)\right)$.

Lemma 2.11 (Parvate and Gangal, 2003) *Derifatif-*F^{α} *dari fungsi* $S_F^{\alpha}(x)$ *adalah fungsi karakteristik* $\chi_F(x)$, *yaitu*

$$D_F^{\alpha}\left(S_F^{\alpha}(x)\right) = \chi_F(x) \text{ untuk } 0 < \alpha \le 1.$$

Bukti:

Jika $x \notin F$, $D_F^{\alpha}\left(S_F^{\alpha}(x)\right) = 0$.

Jika $x \in F$, maka

$$D_F^{\alpha}\left(S_F^{\alpha}(x)\right) = F - \lim_{y \to x} \frac{S_F^{\alpha}(y) - S_F^{\alpha}(x)}{S_F^{\alpha}(y) - S_F^{\alpha}(x)} = 1 \text{ untuk } 0 < \alpha \le 1.$$

3. Pembahasan

Berikut diberikan teorema yang memberikan hubungan antara α dan β, untuk sebarang $\alpha,\beta \in (0,1]$ pada dimensi-γ, kemudian hasil tersebut digunakan untuk menentukan hubungan antara order-α dan order-β, untuk sebarang $\alpha,\beta \in (0,1]$ pada derivatif-F^{α}.

Teorema 3.1 *Diberikan* $F \subset \mathbb{R}$ dan untuk setiap $a,b \in F$.
i. Jika $\gamma^{\alpha}(F,a,b) < \infty$, *maka* $\gamma^{\beta}(F,a,b) = \infty, 0 < \beta < \alpha \le 1$
ii. Jika $\gamma^{\alpha}(F,a,b) > 0$, *maka* $\gamma^{\beta}(F,a,b) = 0, 0 < \alpha < \beta \le 1$.

Bukti

Diberikan $F \subset \mathbb{R}$ dan untuk setiap $a,b \in F$.

i. Untuk $0 < \alpha < \beta \le 1$ dengan $\gamma^{\alpha}(F,a,b) < \infty$, maka diperoleh

$$\sigma^{\beta}[F,P] \le |P|^{\beta-\alpha}\,\sigma^{\alpha}[F,P]\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}$$

berakibat

$$\gamma_{\delta}^{\beta}(F,a,b) \le \delta^{\beta-\alpha}\gamma_{\delta}^{\alpha}(F,a,b)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Limit untuk $\delta \to 0$, diperoleh

$$\gamma^{\beta}(F,a,b) = 0 \text{ untuk } 0 < \alpha < \beta \le 1. \tag{3.1}$$

ii. Untuk $0 < \beta < \alpha \le 1$ dengan $0 < \gamma^{\alpha}(F,a,b)$, andaikan $\gamma^{\beta}(F,a,b) \in \mathbb{R}^{+}$, maka diperoleh

$$\sigma^{\alpha}[F,P] \le |P|^{\alpha-\beta}\,\sigma^{\beta}[F,P]\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

berakibat

$$\gamma_{\delta}^{\alpha}(F,a,b) \le \delta^{\alpha-\beta}\gamma_{\delta}^{\beta}(F,a,b)\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Limit untuk $\delta \to 0$, diperoleh

$$\gamma^{\alpha}(F,a,b) = 0 \text{ untuk } 0 < \beta < \alpha \le 1.$$

Kontradiksi dengan $0 < \gamma^{\alpha}(F,a,b)$, jadi pengandaian $\gamma^{\beta}(F,a,b) \in \mathbb{R}^{+}$ salah. Terbukti

$$\gamma^{\beta}(F,a,b) = \infty \text{ untuk } 0 < \alpha < \beta \le 1. \tag{3.2}$$

Definisi 3.2 *Fungsi* $f : F \to \mathbb{R}$ *dikatakan mempunyai order-*α *terhadap derivatif-*F^{α} *untuk semua titik* $x \in F$ *, jika*

$$\alpha = \inf\left\{\beta : D_F^{\beta}(f(x)) = \infty, 0 < \beta \le 1\right\} = \sup\left\{\beta : D_F^{\beta}(f(x)) = 0, 0 < \beta \le 1\right\}.$$

Teorema 3.3 *Diberikan himpunan perfek-*α $F \subset \mathbb{R}$ *dan fungsi* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
i. jika $0 < \left|D_F^{\alpha}(f(x))\right|$, *maka* $D_F^{\beta}(f(x)) = 0$ *untuk semua* $x \in F$ *dan* $0 < \beta < \alpha \le 1$
ii. jika $\left|D_F^{\alpha}(f(x))\right| < \infty$, *maka* $D_F^{\beta}(f(x)) = \infty$ untuk semua $x \in F$ dan $0 < \alpha < \beta \le 1$.

Bukti

Diberikan himpunan perfek-α $F \subset \mathbb{R}$ dan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Diberikan sebarang $x, y \in F$, diperoleh:

$$\left|\frac{D_F^{\beta}\left(f(x)\right)}{D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)}\right| = \frac{\left|F-\lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{S_F^{\beta}(y)-S_F^{\beta}(x)}\right|}{\left|F-\lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{S_F^{\alpha}(y)-S_F^{\alpha}(x)}\right|} = \frac{F-\lim\limits_{y\to x}\left|S_F^{\alpha}(y)-S_F^{\alpha}(x)\right|}{F-\lim\limits_{y\to x}\left|S_F^{\beta}(y)-S_F^{\beta}(x)\right|}$$

$$= F-\lim_{y\to x}\frac{\left|\gamma^{\alpha}(F,x,y)\right|}{\left|\gamma^{\beta}(F,x,y)\right|}$$

$$\left|D_F^{\beta}\left(f(x)\right)\right| = F-\lim_{y\to x}\frac{\left|\gamma^{\alpha}(F,x,y)\right|}{\left|\gamma^{\beta}(F,x,y)\right|}\left|D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)\right|. \qquad (3.3)$$

i. jika $0<\left|D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)\right|$, maka dari (3.1) dan dengan Teorema 3.1.*i*, diperoleh

$$D_F^{\beta}\left(f(x)\right)=0 \text{ untuk semua } x\in F \text{ dan } 0<\beta<\alpha\le 1.$$

ii. jika $\left|D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)\right|<\infty$, maka dari (3.1) dan dengan Teorema 3.2.*ii*, diperoleh

$$D_F^{\beta}\left(f(x)\right)=\infty \text{ untuk semua } x\in F \text{ dan } 0<\alpha<\beta\le 1.$$

Corollary 3.4 *Diberikan himpunan perfek-*α $F\subset\mathbb{R}$ *dan fungsi* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Untuk semua* $x\in F$ *, berlaku*

$$0<\left|D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)\right|<\infty \text{ jika hanya jika } D_F^{\beta}\left(f(x)\right)=\begin{cases}0, 0<\beta<\alpha\le 1\\ \infty, 0<\alpha<\beta\le 1\end{cases}.$$

Bukti

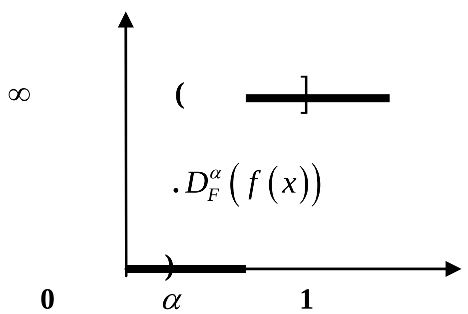
(syarat perlu) Diberikan $0<\left|D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)\right|<\infty$, dengan Teorema 3.3 diperoleh

$$D_F^{\beta}\left(f(x)\right)=\begin{cases}0, 0<\beta<\alpha\le 1\\ \infty, 0<\alpha<\beta\le 1\end{cases}.$$

(syarat cukup) Diberikan $D_F^{\beta}\left(f(x)\right)=\begin{cases}0, 0<\beta<\alpha\le 1\\ \infty, 0<\alpha<\beta\le 1\end{cases}$,

dengan Definisi 3.2 diperoleh

$$0<\left|D_F^{\alpha}\left(f(x)\right)\right|<\infty.$$



Gambar 3.1

Order derivative fungsi f terhadap derivatif-F^{α} pada himpunan fraktal F

Dari Teorema 3.1 dan Teorema 3.3 dapat disimpulkan bahwa dimensi-γ himpunan fraktal F sama dengan order derivatif fungsi $f : F \to \mathbb{R}$ terhadap derivatif -F^{α}.

Contoh 3.5 *Diberikan himpunan pertigaan Cantor C dan fungsi anak tangga* $S_C^{\alpha}(x)$ *dan dimensi-*γ *untuk himpunan pertigaan Cantor adalah* $\alpha = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ ($\dim_{\gamma}(C) = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$), *maka dengan Teorema 3.3, diperoleh*

$$D_C^{\alpha}\left(S_C^{\alpha}(x)\right) = \chi_C(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \in [0,1] - C \end{cases}$$

tetapi $D_C^{\beta}\left(S_C^{\alpha}(x)\right) = \begin{cases} 0, & 0 < \beta < \alpha \le 1 \\ \infty, & 0 < \alpha < \beta \le 1 \end{cases}$ *untuk semua* $x \in [0,1]$ *dengan* $\alpha = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

Fungsi anak tangga Cantor $S_C^{\alpha}(x)$ *tidak terdiferensial biasa (order satu), tetapi terdiferensial-*F^{α} *dengan order* $\alpha = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle.R.G (2001)" *A Modern Theory of Integration*" American Mathematical Society

De Barra.G (1981)" *Measure Theory and Integration*" Ellis Hardwood Ltd. England

Parvate.A and Gangal.A.D (2003)*"Calculus on Fractal Subsets of Real Line-I: Formulation"* *http://arxiv.org/abs/math-ph/0310047v1*

Parvate.A and Gangal.A.D (2005)" Fractal Differential Equations and Fractal-Time Dynamical System" *Pramana. Journal of Physics.Vol. 64, no, 3. March 2005. pp. 389-4009*